

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 preguntas**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

El barómetro de octubre de 2025 del Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) recoge las entrevistas realizadas a una muestra de 4029 personas. La Pregunta 10R plantea al entrevistado: “¿Cuál es, a su juicio, el principal problema que existe actualmente en España? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?” De los 333 entrevistados entre 18 y 24 años, un 35,5% mencionan como alguno de los tres problemas “la vivienda”, un 26,7% “la inmigración” y un 25,1% “los problemas relacionados con la calidad del empleo”. En los barómetros de septiembre y julio de 2025, “la vivienda” fue mencionada como respuesta a la Pregunta 10R por el 31,9% y el 29,3% de los jóvenes en la misma franja de edad, respectivamente.

1.a) (1,5 puntos) Calcule el intervalo de confianza al 95% para la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España en octubre de 2025.

1.b) (1 punto) Para el barómetro de noviembre se desea volver a estimar la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España. Se quiere que esta estimación tenga un margen de error de cinco puntos porcentuales y un nivel de confianza del 97%. Calcule el tamaño de muestra que sería necesario asumiendo que la proporción es $p = 0,355$.

PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.

2.1 Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(1 - x^2) + e^{-\lambda x},$$

donde λ es un parámetro real sin especificar.

2.1.a) (1 punto) Calcule $F(x)$, la primitiva de $f(x)$, tal que $F(0) = 1$.

2.1.b) (1 punto) Obtenga el área entre la curva de $f(x)$ y el eje horizontal en el intervalo $[0, 1]$.

2.1.c) (0,5 puntos) ¿Para qué valores de λ es $f'(0)$ positiva?

2.2 Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{(x-2)^2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2+x^3}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2.2.a) (0,5 puntos) Determine razonadamente el dominio de $f(x)$.

2.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

2.2.c) (0,5 puntos) Calcule la asíntota de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

2.2.d) (1 punto) Calcule la asíntota de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

PREGUNTA 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 3.1 o bien 3.2.

3.1 Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3.1.a) (1,5 puntos) Calcule la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.

3.1.b) (1 punto) Calcule el determinante $|C^2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M .

3.2 Considere la región S del plano delimitada por las siguientes restricciones:

$$x \leq 6, \quad 3y - 2x \leq 10, \quad 3y \geq 2 - 2x, \quad x \leq 10 - y, \quad y \geq x - 6.$$

3.2.a) (2,0 puntos) Calcule las coordenadas de los vértices de S y represente gráficamente la región S .

3.2.b) (0,5 puntos) Se desea minimizar el triple de y menos la mitad de x en S . Indique el valor mínimo y el punto de la región en el cual se alcanza.

PREGUNTA 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 4.1 o bien 4.2.

4.1 Sean A , B y C tres sucesos de los que se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,6, \quad P(C) = 0,5,$$

$$P(A | C) = 0,6, \quad P(B | C) = 0,8$$

$$P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C), \quad P(A \cap B | \bar{C}) = 0,08.$$

4.1.a) (1 punto) Determine si A y B son independientes.

4.1.b) (1,5 puntos) Determine la probabilidad de que C ocurra sabiendo que A y B ocurrieron.

Nota: \bar{S} denota el suceso complementario (contrario) del suceso S .

4.2 En un laboratorio farmacéutico se realiza un test de control de calidad para detectar productos defectuosos antes de su distribución. Se conoce la siguiente información:

- El 3 % de los productos presenta un defecto grave, el 7 % un defecto leve y el resto no presenta defectos.
- Si el defecto es grave, el test da positivo el 98 % de las veces.
- Si el defecto es leve, el test da positivo el 80 % de las veces.
- Si el producto no tiene defectos, el test da positivo el 5 % de las veces.

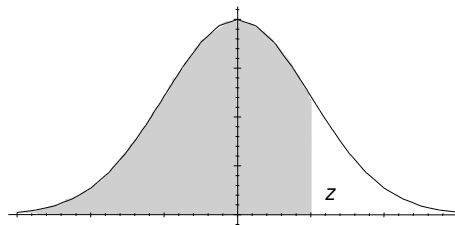
4.2.a) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que el test de un producto seleccionado al azar dé negativo.

4.2.b) (1,3 puntos) Si el test de un producto ha dado positivo, calcule la probabilidad de que el defecto sea grave.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m^2 y la parte no techada, 50 €/m^2 pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi: 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}.$$

- (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 - Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

- a) (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
- b) (1 punto) $P((A \cap B)|(A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

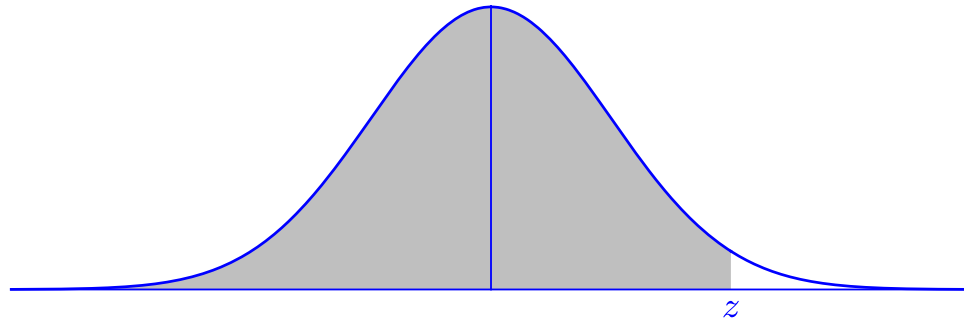
Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.
- b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

*Ministero dell'istruzione e del merito***A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE****Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:**LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10**Disciplina: MATEMATICA*****Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.*****PROBLEMA 1***«La ragione non è nulla senza l'immaginazione» - Cartesio*

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r , di centro l'origine e raggio r , e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

- a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k . Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k , per opportuni valori di k , un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy , tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .
- b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h . Qual è l'espressione analitica di h ?
- c) Sia A un punto del grafico di g , situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.
- d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4 - t^2} dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F , dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

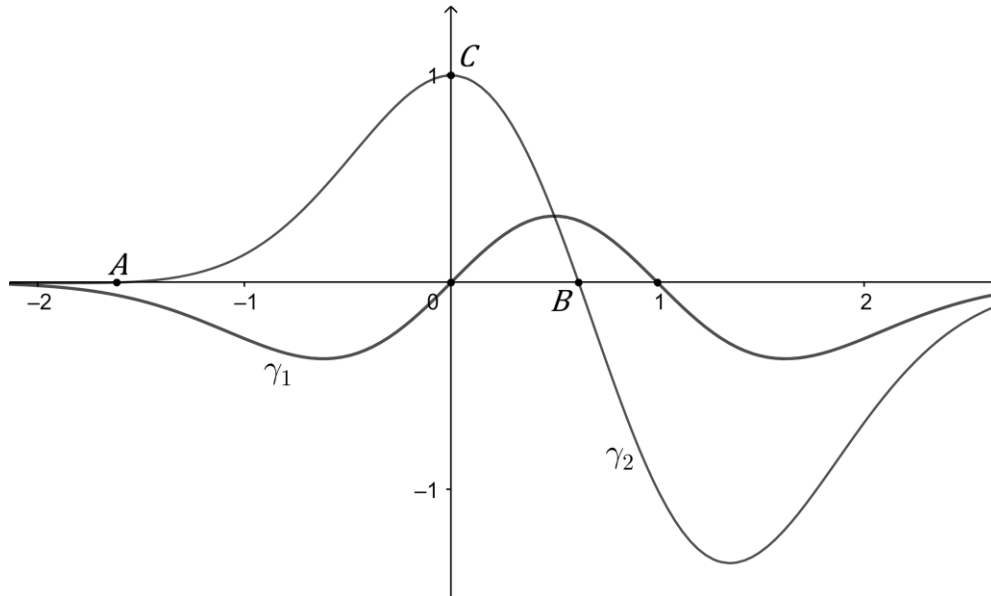


Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

PROBLEMA 2

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g , definite su \mathbb{R} , le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

- Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A , è uno zero di g .
- Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1 . Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k , il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2 , rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2 .
- Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1 , γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R .



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

QUESITI

1. Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC , in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC .
2. Si considerino la superficie sferica di equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d , se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.
3. L'opera futurista di Boccioni "*Forme uniche della continuità nello spazio*" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f , dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1; 2]$.



4. Assegnata una funzione g , derivabile in \mathbb{R} e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x) \operatorname{sen}^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.
5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.
6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x) dx = 9$.

*Ministero dell'istruzione e del merito***A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE**

7. *Siccome mi sembrava che per puro caso alcuni fatti fossero avvenuti così com'erano stati predetti dagli'indovini, tu hai parlato a lungo del caso, e hai detto, per esempio, che si può ottenere il "colpo di Venere" lanciando a caso quattro dadi [...].*

Cicerone, *De divinatione*, II, 21, 48 - traduzione e cura di S. Timpanaro, Garzanti, Milano 1999.

Testo originale - *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis [...].*

Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:

- la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;
- la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.

8. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"?

Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

*«La matematica non conosce razze o confini geografici;
per la matematica, il mondo culturale è una singola nazione»*

D. Hilbert

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 15 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από ΔΥΟ (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\tauοξημχ}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

A2 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = -1$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 3)

β) Αν $\alpha = -3$ και $\beta = 3$, να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 2)

A3 Εννέα σύνεδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι ο πρόεδρος, οι δύο είναι σύμβουλοι και οι υπόλοιποι είναι μέλη, θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι για να συνεδριάσουν. Ο πρόεδρος και οι δύο σύμβουλοί του θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται πάντοτε στη μεσαία θέση, ανάμεσα στους δύο συμβούλους του, να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση όλων των συνέδρων.

A4 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \frac{1}{\kappa + 4} - \frac{1}{\kappa + 5}$$

(Μονάδες 1)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο κάτω σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20}$$

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 + 9x + 23}{x^2 + 9x + 20} dx$$

(Μονάδες 2)

A5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - xe^x = \ln x + \lambda$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

A6 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση (C) : $x^2 + y^2 = 4$ και η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής.

(Μονάδες 1)

β) Έστω $N(2\sigma\eta\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, τυχαίο σημείο του κύκλου (C) και $\Sigma(x, y)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EN . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι κύκλος με εξίσωση (C_1) : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

(Μονάδες 2,5)

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων (C) και (C_1) .

(Μονάδες 1,5)

A7 α) Έστω ότι X, Y είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(X' \cap Y') = P(X') \cdot P(Y')$$

β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A) = 3P(A'), \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{7}{8},$$

να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' \cap B')$.

A8 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}x > 1 - e^x, \quad \forall x > 0$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + e^x - 1}{x}$$

(Μονάδες 2)

A9 α) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι:

$$\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx = e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c$$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx$$

A10 α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx = \pi + 2, \quad x = 2\sqrt{2}\eta\mu\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{8-x^2}$, την καμπύλη $y = x^3 + 4$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες των συντεταγμένων.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.
- ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 1-2-2-2-2-1)

B2 Έστω συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x - y = 2$ εφαπτόμενη της γραφικής παράστασής της στο σημείο $(3, f(3))$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

B3 Ένα κουτί περιέχει 10 όμοιες μπάλες από τις οποίες οι 7 είναι κόκκινες και οι 3 είναι πράσινες. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες τυχαία από το κουτί. Αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τότε χωρίς να την επανατοποθετήσουμε στο κουτί παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα. Ενώ, αν η πρώτη μπάλα είναι πράσινη, τότε την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα.

- α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήραμε να είναι πράσινη.
(Μονάδες 6)
- β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήραμε είναι πράσινη, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήραμε να είναι κόκκινη;
(Μονάδες 4)

B4 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$. Στο σημείο A φέρουμε εφαπτόμενη (ε) η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) είναι:

$$(\varepsilon): ty = x + t^2$$

(Μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ για το οποίο το $BO\Gamma\Delta$ (όπου O η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι η παραβολή $y^2 = -x$.

(Μονάδες 3)

γ) Θεωρούμε ότι το σημείο $A(t^2, 2t)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ($t > 0$). Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_1 . Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία (ε) , περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_2 . Να αποδείξετε ότι:

$$V_1 = 3 V_2$$

(Μονάδες 5)

B5 Η ευθεία που διέρχεται του σημείου $K(7, 3)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο M και την ευθεία $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο στο σημείο N . Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OMN (όπου O η αρχή των αξόνων) να είναι ελάχιστο.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } n = \sum_{i=1}^k f_i$$

$$r = \frac{\sum_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{nS_x S_y}, \quad \text{όπου } \sum_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ\kappa + 180^\circ - \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa \pm \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\alpha$	$x = 180^\circ\kappa + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλυρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$

Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x \quad (\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x \quad (\varepsilon \varphi x)' = \tau \varepsilon \mu^2 x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau \varepsilon \mu x \, dx = \ln |\tau \varepsilon \mu x + \varepsilon \varphi x| + c \quad \int \sigma \tau \varepsilon \mu x \, dx = \ln \left| \varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu \frac{x}{\alpha} + c \quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1-1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) .$$

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και

ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x} .$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- i) $\kappa = 0$ και
- ii) $\mu = 1$.

Μονάδες 8

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες

3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για

κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 11

Γ3. Για $v \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$, $v \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1 και I_2 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2 . (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ